

Des indécidables à portée de main

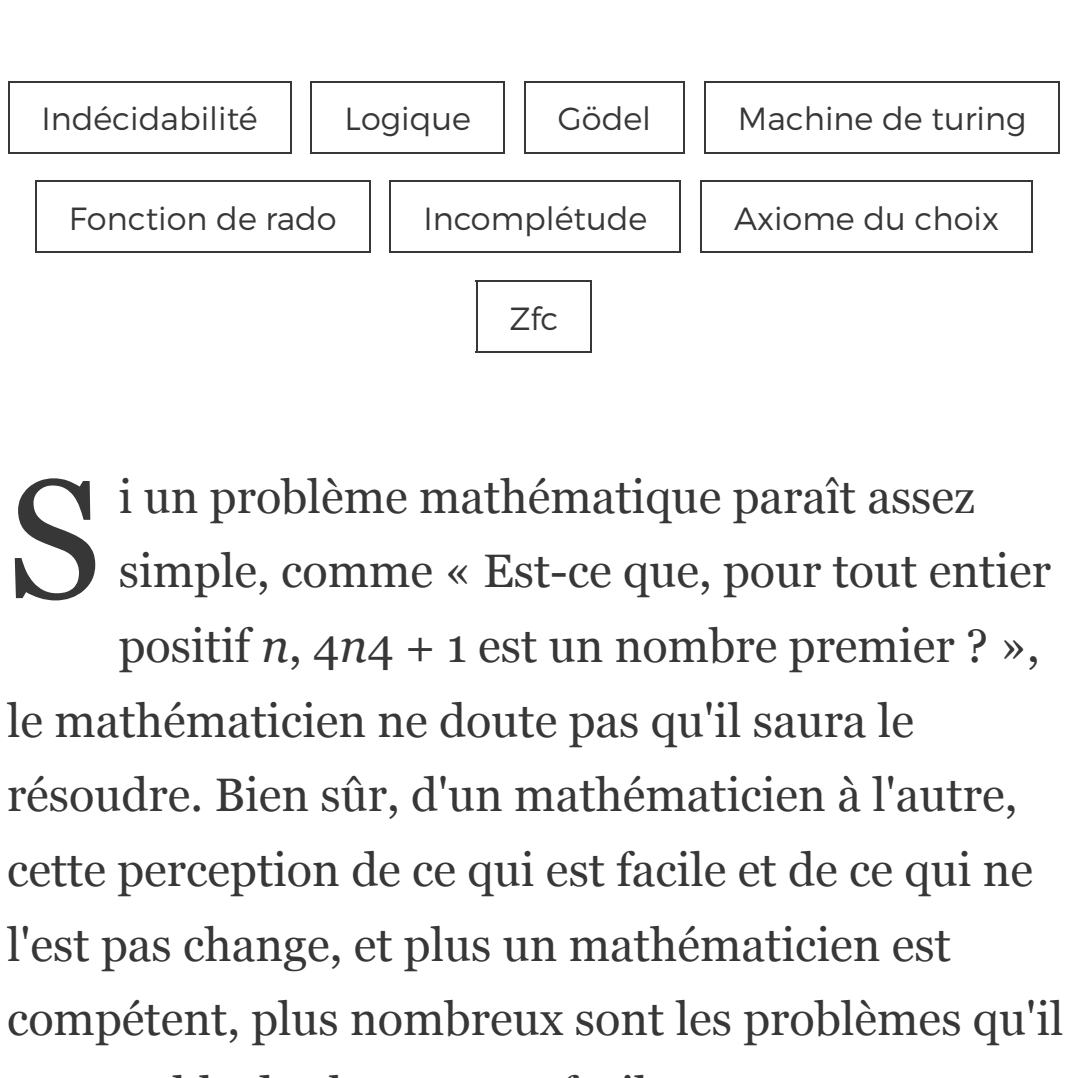
Les énoncés dont on ne peut prouver ni qu'ils sont vrais ni qu'ils sont faux semblent moins rares qu'on ne l'imaginait : de tels « indécidables », redoutés par les mathématiciens, ont été trouvés avec des problèmes portant sur de petites machines de Turing.

Jean-Paul Delahaye

28 septembre 2016 | [POUR LA SCIENCE N° 468](#) | Temps de lecture : 12 mn

Article réservé aux abonnés numériques

S'abonner



Représentation schématique d'une machine de Turing.

© PLS/Cassandra Vion

Pour ne rien manquer de *Pour La Science*, inscrivez-vous à nos newsletters (gratuites)

Indécidabilité	Logique	Côdel	Machine de turing
Fonction de rado	Incomplétude	Axiome du choix	
	Zfc		

Si un problème mathématique paraît assez simple, comme « Est-ce que, pour tout entier positif n , $4n4 + 1$ est un nombre premier ? », le mathématicien ne doute pas qu'il saura le résoudre. Bien sûr, d'un mathématicien à l'autre, cette perception de ce qui est facile et de ce qui ne l'est pas change, et plus un mathématicien est compétent, plus nombreux sont les problèmes qu'il est capable de classer en « facile » ou « probablement difficile ».

Il se trouve cependant que même les meilleurs des mathématiciens sont impuissants à évaluer la difficulté de questions à l'apparence élémentaire. Fermat n'avait certainement pas imaginé combien il était difficile de démontrer qu'il n'y a pas de solution à l'équation $nq + mq = pq$, où n , m , p désignent des entiers positifs et q un entier supérieur à 2. De graves obstacles sont dissimulés dans des énoncés d'allure innocente. Les problèmes les plus difficiles sont ceux qualifiés d'« indécidables ».

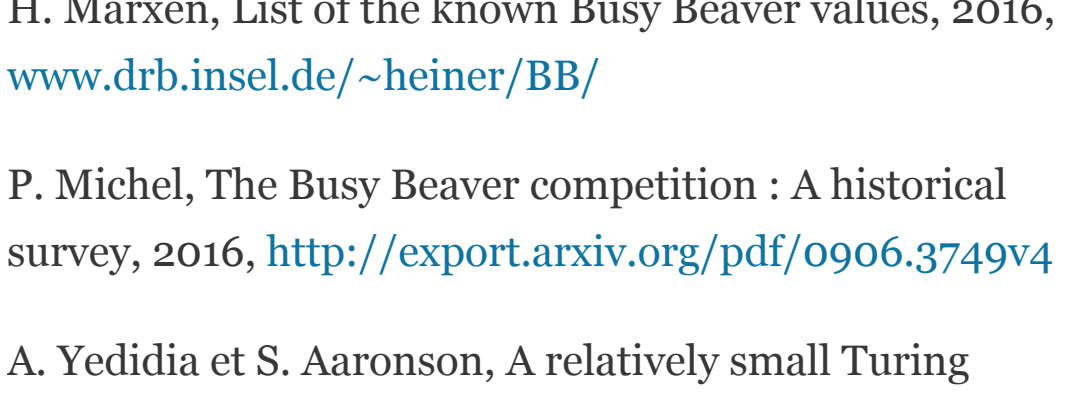
Un jeu utile et délicat est de repérer les indécidables les plus simples dans le but de mieux comprendre où cette apparition d'obstacles graves risque de se produire. Identifier où se niche leur absolue difficulté fait progresser les mathématiques aussi bien que la résolution de problèmes.

Qu'est-ce que l'indécidabilité ? Un énoncé est indécidable dans une théorie donnée si celle-ci ne peut ni démontrer l'énoncé, ni démontrer sa négation. Bien sûr, pour établir que des énoncés sont indécidables dans une théorie mathématique donnée T , il faut avoir très précisément défini cette

Vous avez lu 10% de cet article. La suite est réservée aux abonnés.
Déjà abonné.e ? [Me connecter](#)

Pour soutenir l'information scientifique et profiter de l'intégralité de *Pour la Science*, abonnez-vous !

Découvrez toutes nos offres, à partir de **5,50 € / mois sans engagement**



Je m'abonne

Auteur

Jean-Paul Delahaye

Jean-Paul Delahaye est [professeur émérite en informatique](#) à l'Université de Lille et chercheur au centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (CRISTAL). Il est l'auteur de la rubrique [Logique et calcul](#) dans *Pour la Science*.

[Voir tous ses articles](#)

Références

S. Aaronson, The 8000th Busy Beaver number eludes ZF set theory : New paper by Adam Yedidia and me, blog de mai 2016, www.scottaaronson.com/blog/?m=201605

H. Marxen, List of the known Busy Beaver values, 2016, www.drb.insel.de/~heiner/BB/

P. Michel, The Busy Beaver competition : A historical survey, 2016, <http://export.arxiv.org/pdf/0906.3749v4>

A. Yedidia et S. Aaronson, A relatively small Turing machine whose behavior is independent of set theory, 2016, <https://arxiv.org/pdf/1605.04343.pdf>

F. Soler-Toscano *et al.*, Calculating Kolmogorov complexity from the output frequency distributions of small Turing machines, *PLoS One*, vol. 9(5), e96223, 2014.

C. S. Calude et E. Calude, Evaluating the complexity of mathematical problems : Part 1 & Part 2, *Complex Systems*, vol. 18, pp. 267-285, 2009 et pp. 387-401, 2010.

Article paru dans

Pour la Science N°468 - Octobre 2016

Sommaire

Acheter au format numérique

S'abonner

Sur le même sujet

Logique & calcul 18mn 17/03/2025

Le problème du « cinquième castor affairé » résolu

Logique & calcul 23mn 06/09/2022

Logique mathématique : pouvons-nous échapper à l'incomplétude ?

Mathématiques 8mn 09/06/2021

Les indécidables trajectoires d'un fluide

Informatique 2mn 24/05/2017

Au-delà du test de Turing

Mathématiques 15mn 27/03/2018

Les indécidables absolus existent-ils ?

Physique 2mn 31/05/2017

Le zéro absolu est bien hors de portée

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

Découvrez nos abonnements à partir de **5,50€/mois** Sans engagement

Je m'abonne

Articles les plus lus

1 **Évaluation des universités : derrière le Hcéres, les collègues !**

2 **Le mécanisme d'intégration d'ADN étranger dans le génome des eucaryotes dévoilé**

3 **Lionel Naccache : « la vraie structure de notre conscience est discrète, au sens mathématique »**

4 **La conscience quantique à l'épreuve**

5**DESI : l'hypothèse d'une énergie noire qui évolue dans le temps se renforce**

6**L'étonnant feu d'artifice du trou noir central de notre galaxie**

7**« Toutes nos expériences conscientes trouvent leur origine dans cet impératif fondamental qui est de rester en vie »**

8**[À l'écoute de la science] Les mystères du sommeil**

9 **États-Unis : la réduction des subventions pour les frais indirects menace la recherche**

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 91526

Pour la Science

La science expliquée par ceux qui la font

170 BIS BOULEVARD DU MONT-PARNASSE, 75014 PARIS 06

N° CPPAP : 0927 X 9