por Bartolo Luque

Bartolo Luque es físico y profesor de matemáticas en la Universidad Politécnica de Madrid. Sus investigaciones se centran en la teoría de sistemas complejos.

La brecha de Sloane

Tras la huella sociológica de las matemáticas

El matemático Neil Sloane empezó a coleccionar sucesiones de números enteros en 1964. Tras la publicación de dos libros recopilatorios, multitud de colegas comenzaron a enviarle sucesiones que consideraban interesantes. Al poco, el proyecto se hizo inviable en papel. Así nació la Enciclopedia Electrónica de Sucesiones Enteras, también conocida como OEIS por sus siglas en inglés (*On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*: https://oeis.org). En el momento de escribir este artículo, la OEIS almacena más de 240.000 sucesiones y continúa creciendo sin parar.

¿Puede el lector encontrar una expresión sencilla para el término general de la sucesión 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12...? Contémplela y piense un momento antes de continuar leyendo.

Si la ha identificado como la sucesión complementaria a la de los cuadrados perfectos (es decir, aquella formada por todos los números que no son cuadrados perfectos), habrá podido expresar su término general como: $a(n) = n + [1/2 + \sqrt{n}]$, donde los corchetes denotan la parte entera. Así, el término quinto viene dado por $a(5) = 5 + [1/2 + \sqrt{5}] = 5 + [2{,}736...] = 5 + 2 = 7$.

Seguro que el lector conoce la siguiente y famosa sucesión: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... Pero supongamos que no es el caso y que, tras unos cuantos cabezazos, la impotencia se apodera de su espíritu. Podrá entonces acudir a la página web de la OEIS, escribir los términos en cuestión y obtener la respuesta: la sucesión de Fibonacci. Esta puede generarse a través de la recurrencia $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$, con condiciones iniciales $F(0) = 1$ y $F(1) = 1$.

La OEIS nos ofrece una lista con los 39 primeros términos, la posibilidad de representarlos gráficamente o incluso escucharlos convertidos en música. También nos muestra una gran cantidad de comentarios sobre la aparición de los números de Fibonacci en todo tipo de problemas matemáticos, una nutrida colección de referencias bibliográficas y enlaces, así como fórmulas menos conocidas para generarlos, métodos para hacerlo en algunos programas de cálculo simbólico, como Mathematica o Maple, o en pseudocódigo, para que lo programemos nosotros mismos. De hecho, la OEIS hila aún más fino: nos propone como primera solución los números de Fibonacci, pero nos ofrece hasta 73 sucesiones distintas cuyos ocho primeros términos coinciden con los que hemos tecleado.

Pero la OEIS no solo nos permite introducir los números de una sucesión, sino también palabras clave. Si escribimos *spanish*, nos devolverá 95 resultados. Uno de ellos será la sucesión 4, 3, 3, 4, 6, 5, 4, 5, 4, 5, 4..., otro clásico de las matemáticas recreativas. Por algún motivo, esta sucesión se encuentra emparentada con nuestro querido idioma. ¿Adivina el lector el siguiente término?

Si vamos introduciendo palabras, comprobaremos que la OEIS constituye una fuente de conocimientos sobre temas científicos de toda índole. Al teclear *planet*, encontraremos las secuencias de los períodos de rotación o los diámetros de los planetas del sistema solar. Y si escribimos *carbon* (referido al átomo de carbono), obtendremos una gran cantidad de información sobre química orgánica.

Probemos ahora con un término menos científico y tecleemos *lazy* («perezoso»). Aparecerá ante nuestros ojos la sucesión llamada «del hostelero perezoso». Sus primeros términos son 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56... Adelantaremos que esta enumera el máximo número de trozos, no necesariamente iguales, que podemos obtener de una pizza circular con n cortes rectos de cuchillo. Ahora ya nos hacemos una idea del porqué de su estrambótico título. ¿Sabría el lector encontrar el término general?

Visto lo visto, la OEIS no es solo una página de referencia para investigadores, sino también una magnífica herramienta para educadores y una fuente inacabable de matemáticas recreativas.

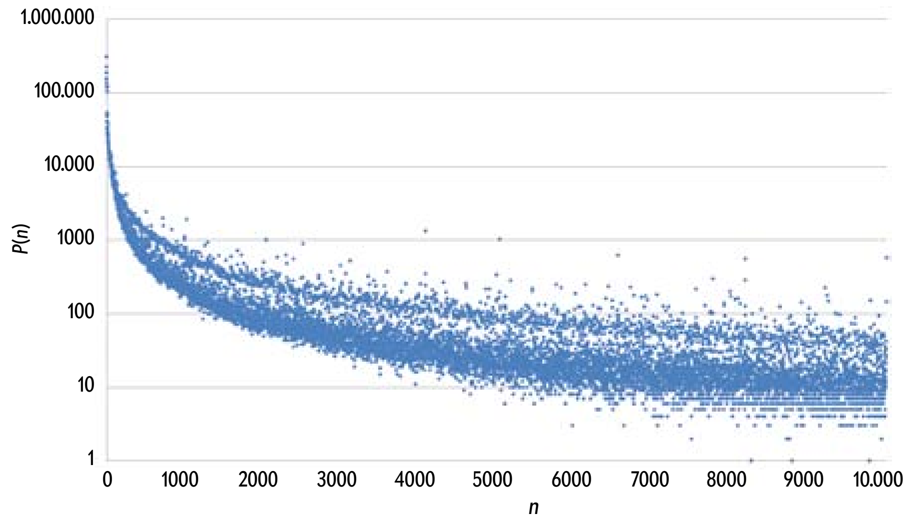
Diccionarios de números

Existen multitud de diccionarios de números: *Les nombres remarquables*, de François Le Lionnais (1983); *Mathematical constants*, de Steven Finch (2003), *Those fascinating numbers*, de Jean-Marie De Konninck (2009)... La propia Wikipedia incluye un diccionario. Si escribimos «42», descubriremos, entre otras cosas, que este número da la respuesta a «el sentido de la vida, el universo y todo lo demás».

Tal vez el diccionario de números más popular sea *The Penguin dictionary of curious and interesting numbers*, de David Wells. Publicado por primera vez en 1987, constituye un libro de referencia para los amantes de las matemáticas recreativas.

Al llegar a la entrada correspondiente al número 39, el autor nos regala la siguiente perla: «Este parece ser el primer número carente de interés, lo que por supuesto lo convierte en un número especialmente interesante, ya que se trata del número más pequeño que tiene la propiedad de ser anodino. Es por tanto, también, el primer número simultáneamente interesante y anodino». En la obra de Wells, el primer ausente es el número 43. En la versión hispana de la Wikipedia, el primer número sin mención (hay que escribirlo en palabras) es «doscientos uno».

La OEIS funciona también como un diccionario de números. Introduzcamos un clásico: 1729. La OEIS nos informa de que el número aparece en 499 sucesiones. En la sexta posibilidad (*Taxi-cab numbers*), nos cuenta que el número se conoce hoy como número de Hardy-Ramanujan. La historia que justifica su nombre es hoy célebre. En cierta ocasión, el experto en teoría de números Godfrey Harold Hardy visitó a su colega Srinivasa Ramanujan en el hospital. Al llegar, le comentó que el taxi que lo había traído tenía un número de placa anodino, el



ABISMO NUMÉRICO: Frecuencia $P(n)$ con la que aparecía cada número n comprendido entre el 2 y el 10.000 en la base de datos de OEIS en agosto de 2008. Los datos, empleados por Philippe Guglielmetti, pueden descargarse como hoja de Excel desde www.box.net/shared/3yefxar19b.

CORTESÍA DEL AUTOR

1729, a lo que Ramanujan respondió: «No, se trata de un número muy interesante. Es el primer número natural que puede expresarse como la suma de dos cubos positivos de dos formas diferentes». Y, en efecto, $1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$. A modo de homenaje, hoy se conoce como «enésimo número *taxicab*» al número más pequeño que puede descomponerse como n sumas distintas de dos cubos positivos.

A continuación, Hardy preguntó a Ramanujan si conocía la respuesta para las cuartas potencias. Tras pensarlo un momento, Ramanujan contestó que no veía la solución, pero que debía tratarse de un número extremadamente grande. Hoy, gracias a los ordenadores, sabemos que la respuesta es 635.318.657 (el cual es igual a $134^4 + 133^4 = 158^4 + 59^4$).

También se conoce como «número *taxicab* generalizado», Taxicab(k, j, n), al más pequeño que puede expresarse como la suma de j k-ésimas potencias de n formas diferentes. El caso $k = 3$ y $j = 2$ corresponde a los números *taxicab*. Y, con $n = 2$, obtenemos el número de Hardy-Ramanujan.

Números populares

La base de datos de la OEIS puede descargarse en https://oeis.org/stripped.gz. En el fichero, cada sucesión aparece identificada mediante una etiqueta (por ejemplo, A001235 denota la sucesión de los números *taxicab*) y, a continuación, se muestran sus primeros términos.

En agosto de 2008, el matemático Philippe Guglielmetti decidió estudiar la frecuencia con la que aparecían los distintos números en la OEIS. Encontró que el primer número ausente de la base de datos, el primer número anodino, era el 8795. Para cada entero n comprendido entre el 2 y el 65.536, Guglielmetti calculó el número de veces $P(n)$ que aparecía en la base de datos. Halló que $P(2) = 308.154$, $P(3) = 221.140$, $P(4) = 159.911$, etcétera. O, como hemos apuntado, que $P(8795) = 0$.

Al representar n frente a $P(n)$, observó que la nube de puntos quedaba dividida en dos bandas separadas por una zona mucho más clara (*véase la figura*). La franja superior correspondía a aquellos números que aparecían con una frecuencia elevada, y la inferior, a números anodinos, como $P(8267) = P(9734) = 1$, $P(7495) = P(8758) = 2$, etcétera.

Intrigado por el fenómeno, Guglielmetti comentó la cuestión con el matemático Jean-Paul Delahaye. ¿A qué podía deberse esa franja blanca que separaba los números en dos clases? Delahaye, en colaboración con Hector Zenil y Nicolas Gauvrit, matemático y psicólogo, respectivamente, constataron que, tras ajustar por regresión la nube de puntos ($P(n) = an^{-4/3}$, con $a = 2{,}53 \cdot 10^8$), los números primos, las potencias de enteros y los números compuestos por una gran cantidad de primos diferentes prácticamente capitalizaban la banda de los números interesantes.

El motivo, razonaron, probablemente se debiera a que numerosas sucesiones se definen por una combinación de tales criterios. Si, por ejemplo, buscamos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17..., no solo obtendremos como respuesta «los números primos», sino un total de 292 resultados, producto de combinar la primalidad con otras propiedades. En cierto modo, concluyeron los investigadores, $P(n)$ mide la riqueza de propiedades del número n.

Atendiendo a esa intuición, y con ayuda de las herramientas de la teoría de la complejidad algorítmica, estimaron la forma decreciente de $P(n)$ y, mediante una astuta simulación de Montecarlo, reprodujeron de manera cualitativa la nube de propiedades numéricas. La semejanza era innegable, pero había una diferencia trascendental: la brecha de Sloane —como acabaron bautizando a la separación entre los números interesantes y los anodinos— no aparecía. Razonaron que la respuesta no se encontraba en la matemática, sino en la sociología.

Según Delahaye, Zenil y Gauvrit, la brecha de Sloane no constituiría un efecto matemático, sino «social». Se debería a que los matemáticos, arrastrados por investigaciones anteriores o por modas, se interesan más por ciertas propiedades que por otras de igual complejidad.

La brecha de Sloane sería así la impronta de la contingencia en la investigación matemática: la huella de su evolución histórica y humana. ¿Daríamos tanta importancia a los números *taxicab* generalizados si Hardy no se hubiera subido aquella mañana al taxi 1729?

PARA SABER MÁS

Mille collections de nombres. Jean-Paul Delahaye en *Pour la Science*, n.º 379, págs. 88-93, mayo de 2009.

Le fossé de Sloane. Entrada en el blog de Philippe Guglielmetti, 2011: **www.drgoulu.com/2011/04/10/le-fosse-de-sloane**

Sloane's gap: Do mathematical and social factors explain the distribution of numbers in the OEIS? Nicolas J.-P. Gauvrit, Jean-Paul Delahaye y Hector Zenil en *Journal of Humanistic Mathematics*, vol. 3, n.º 1, págs. 3-16, 2013.